Fundamentos de lenguajes de programación cuántica

Día 5:
$\sim$ Control y datos cuánticos $\backsim$

Alejandro Díaz-Caro

Universidad Nacional de Quilmes

22º Escuela de Verano de Ciencias Informáticas
Río Cuarto, Córdoba – 9 al 14 de febrero de 2015

Premisa

- Los qubits son vectores

Premisa

- Los qubits son vectores
- En λ-cálculo no hay distinción entre datos y programas

Premisa

- Los qubits son vectores
- En λ-cálculo no hay distinción entre datos y programas
- Si los datos pueden estar en superposición...
  ¡los programas en λ-cálculo también!

Historia

Pablo Arrighi y Gilles Dowek

International Conference on Rewriting Techniques and Applications, 2008

"Lambda cálculo algebraico-lineal"

- Espacio vectorial de términos
- Operaciones de espacios vectoriales en el sistema de reescritura

Historia

Pablo Arrighi y Gilles Dowek

International Conference on Rewriting Techniques and Applications, 2008

"Lambda cálculo algebraico-lineal"

- Espacio vectorial de términos
- Operaciones de espacios vectoriales en el sistema de reescritura

Lionel Vaux

Mathematical Structures in Computer Science, 19(5) 1029–1059, 2009

"Lambda cálculo algebraico"

- Simplificación del lambda cálculo diferencial
- ¡Casi la misma idea! Con dos diferencias:
  - Estrategia call-by-name (el otro es call-by-value)
  - Espacios vectoriales $\rightarrow$ igualdades (no reescritura)

Historia

Pablo Arrighi y Gilles Dowek

International Conference on Rewriting Techniques and Applications, 2008

"Lambda cálculo algebraico-lineal"

- Espacio vectorial de términos
- Operaciones de espacios vectoriales en el sistema de reescritura

Lionel Vaux

Mathematical Structures in Computer Science, 19(5) 1029–1059, 2009

"Lambda cálculo algebraico"

- Simplificación del lambda cálculo diferencial
- ¡Casi la misma idea! Con dos diferencias:
  - Estrategia call-by-name (el otro es call-by-value)
  - Espacios vectoriales $\rightarrow$ igualdades (no reescritura)

Ali Assaf, Alejandro Díaz-Caro, Simon Perdrix, Christine Tasson, Benoît Valiron

Logical Methods in Computer Science, 10(4:8), 2014

"Son lo mismo" (es decir: se pueden simular uno al otro)

Lambda Cálculo Algebraico Lineal

("Lineal" para los amigos)

Sintaxis

$$
\begin{array}{rclclcl}
\mathbf{t}, \mathbf{r} & ::= & x & \mid & \lambda x.\mathbf{t} & \mid & \mathbf{t}\ \mathbf{r} \\
 & & \alpha.\mathbf{t} & \mid & \mathbf{t} + \mathbf{r} & \mid & \mathbf{0}
\end{array}
$$

Lambda Cálculo Algebraico Lineal

(“Lineal” para los amigos)

Sintaxis

$$\begin{array}{rcl|c|c} \mathbf{t},\mathbf{r} & ::= & x & \lambda x.\mathbf{t} & \mathbf{t}\ \mathbf{r} \\ & & \alpha.\mathbf{t} & \mathbf{t}+\mathbf{r} & \mathbf{0} \end{array}$$

Beta reduction:

$$(\lambda x.\mathbf{t})\ \mathbf{v} \quad \to \quad \mathbf{t}[\mathbf{v}/x]$$

Reducciones “algebraicas”:

$$\begin{array}{rcl} \alpha.\mathbf{t}+\beta.\mathbf{t} & \to & (\alpha+\beta).\mathbf{t}, \\ \alpha.\beta.\mathbf{t} & \to & (\alpha\times\beta).\mathbf{t}, \\ (\mathbf{t})\ (\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2) & \to & (\mathbf{t})\ \mathbf{r}_1+(\mathbf{t})\ \mathbf{r}_2, \\ (\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2)\ \mathbf{r} & \to & (\mathbf{t}_1)\ \mathbf{r}+(\mathbf{t}_2)\ \mathbf{r}, \\ & \dots & \end{array}$$

versión orientada de los axiomas de espacios vectoriales

(más en el próximo slide)

Lambda Cálculo Algebraico Lineal

(“Lineal” para los amigos)

Sintaxis

$$\begin{array}{rcl|l|l} \mathbf{t},\mathbf{r} & ::= & x & \lambda x.\mathbf{t} & \mathbf{t}\ \mathbf{r} \\ & & \alpha.\mathbf{t} & \mathbf{t}+\mathbf{r} & \mathbf{0} \end{array}$$

Beta reduction:

$$(\lambda x.\mathbf{t})\ \mathbf{v} \quad\to\quad \mathbf{t}[\mathbf{v}/x]$$

Reducciones “algebraicas”:

$$\begin{array}{rcl} \alpha.\mathbf{t}+\beta.\mathbf{t} & \to & (\alpha+\beta).\mathbf{t}, \\ \alpha.\beta.\mathbf{t} & \to & (\alpha\times\beta).\mathbf{t}, \\ (\mathbf{t})\ (\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2) & \to & (\mathbf{t})\ \mathbf{r}_1+(\mathbf{t})\ \mathbf{r}_2, \\ (\mathbf{t}_1+\mathbf{t}_2)\ \mathbf{r} & \to & (\mathbf{t}_1)\ \mathbf{r}+(\mathbf{t}_2)\ \mathbf{r}, \\ & \dots & \end{array}$$

versión orientada de los axiomas de espacios vectoriales
(más en el próximo slide)

Espacio vectorial de “valores”

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{t}_i : \mathbf{t}_i \text{ var. o abs. }\}$$

Conjunto de valores $::= \mathrm{Gen}(\mathcal{B})$

Lineal

Todas sus reglas de reescritura

Grupo E

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\alpha.\mathbf{0} & \to & \mathbf{0} & \mathbf{0}+\mathbf{t} & \to & \mathbf{t} \\
\alpha.(\beta.\mathbf{t}) & \to & (\alpha\times\beta).\mathbf{t} & 0.\mathbf{t} & \to & \mathbf{0} \\
1.\mathbf{t} & \to & \mathbf{t} & \alpha.(\mathbf{t}+\mathbf{r}) & \to & \alpha.\mathbf{t}+\alpha.\mathbf{r}
\end{array}$$

Grupo F

$$\begin{array}{rcl}
\alpha.\mathbf{t}+\beta.\mathbf{t} & \to & (\alpha+\beta).\mathbf{t} \\
\alpha.\mathbf{t}+\mathbf{t} & \to & (\alpha+1).\mathbf{t} \\
\mathbf{t}+\mathbf{t} & \to & (1+1).\mathbf{t}
\end{array}$$

Grupo A

$$\begin{array}{c@{\qquad}c}
(\mathbf{t}+\mathbf{r})\ \mathbf{s} \to \mathbf{t}\ \mathbf{s}+\mathbf{r}\ \mathbf{s} & \mathbf{t}\ (\mathbf{r}+\mathbf{s}) \to \mathbf{t}\ \mathbf{r}+\mathbf{t}\ \mathbf{s} \\
(\alpha.\mathbf{t})\ \mathbf{r} \to \alpha.(\mathbf{t}\ \mathbf{r}) & \mathbf{t}\ \alpha.\mathbf{r} \to \alpha.(\mathbf{t}\ \mathbf{r}) \\
\mathbf{0}\ \mathbf{t} \to \mathbf{0} & \mathbf{t}\ \mathbf{0} \to \mathbf{0}
\end{array}$$

Grupo B

$$(\lambda x.\mathbf{t})\ \mathbf{v} \to \mathbf{t}[\mathbf{v}/x]$$

El problema de la confluencia

$$Y_b = (\lambda x.(\mathbf{b} + x\ x))(\lambda x.(\mathbf{b} + x\ x))$$

El problema de la confluencia

$$Y_b = (\lambda x.(\mathbf{b} + x\ x))(\lambda x.(\mathbf{b} + x\ x))$$

$$¿\ Y_b - Y_b\ ?$$

En el pizarrón

- Desarrollo de este ejemplo
- Posibles soluciones:
  - Tipos
  - Restricciones en reescritura
  - Restricciones en escalares

Ejemplo de programa en Lineal

Dos vectores de base:

$$\texttt{true} = \lambda x.\lambda y.x$$
$$\texttt{false} = \lambda x.\lambda y.y$$

Ejemplo de programa en Lineal

Dos vectores de base:

$$\texttt{true} = \lambda x.\lambda y.x$$
$$\texttt{false} = \lambda x.\lambda y.y$$

Operador cuántico U tal que

$$U\ \texttt{true} = a.\texttt{true} + b.\texttt{false}$$
$$U\ \texttt{false} = c.\texttt{true} + d.\texttt{false}$$

Ejemplo de programa en Lineal

Dos vectores de base:

$$\texttt{true} = \lambda x.\lambda y.x$$
$$\texttt{false} = \lambda x.\lambda y.y$$

Operador cuántico U tal que

$$U\ \texttt{true} = a.\texttt{true} + b.\texttt{false}$$
$$U\ \texttt{false} = c.\texttt{true} + d.\texttt{false}$$

$$U := \lambda x.x\ (a.\texttt{true} + b.\texttt{false})\ (c.\texttt{true} + d.\texttt{false})$$

Ejemplo de programa en Lineal

Dos vectores de base:

$$\begin{aligned}\texttt{true} &= \lambda x.\lambda y.x\\ \texttt{false} &= \lambda x.\lambda y.y\end{aligned}$$

Operador cuántico U tal que

$$\begin{aligned}U\ \texttt{true} &= a.\texttt{true} + b.\texttt{false}\\ U\ \texttt{false} &= c.\texttt{true} + d.\texttt{false}\end{aligned}$$

$$U := \lambda x.x\ (a.\texttt{true} + b.\texttt{false})\ (c.\texttt{true} + d.\texttt{false})$$

Muy lindo... pero así no funciona (EN EL PIZARRÓN EL PORQUÉ)

Ejemplo de programa en Lineal

Dos vectores de base:

$$\texttt{true} = \lambda x.\lambda y.x$$
$$\texttt{false} = \lambda x.\lambda y.y$$

Operador cuántico U tal que

$$U\ \texttt{true} = a.\texttt{true} + b.\texttt{false}$$
$$U\ \texttt{false} = c.\texttt{true} + d.\texttt{false}$$

$$U := \lambda x.x\ (a.\texttt{true} + b.\texttt{false})\ (c.\texttt{true} + d.\texttt{false})$$

Muy lindo... pero así no funciona (EN EL PIZARRÓN EL PORQUÉ)

$$U := \lambda x.\{x\ [a.\texttt{true} + b.\texttt{false}]\ [c.\texttt{true} + d.\texttt{false}]\}$$

$$\text{con} \begin{cases} [\mathbf{t}] = \lambda x.\mathbf{t} \\ \{\mathbf{t}\} = \mathbf{t}\ x \end{cases}$$

Historia (continuación)

Pablo Arrighi y Alejandro Díaz-Caro

Logical Methods in Computer Science, 8(1:11), 2012

"Scalar"

- Primer sistema de tipos para Lineal
- Tiene en cuenta las amplitudes en los tipos

Alejandro Díaz-Caro y Barbara Petit

Logic, Language, Information and Computation, LNCS 7456 216–231, 2012

"Additive"

- Sistema de tipos que considera las superposiciones

Alejandro Díaz-Caro

Tesis doctoral, Grenoble, 2011

(con Pablo Arrighi y Benoît Valiron, enviado para publicación en 2013)

"Lambda Cálculo Vectorial"

- Lineal, tipado
- Los tipos forman también un espacio vectorial

Hoja de ruta

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{System } F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}\textbf{Scalar}\\ \alpha.A\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\textbf{Additive}\\ A+B\end{array} \arrow[dl] \\
 & \begin{array}{c}\textbf{Vectorial}\\ \alpha.A+\beta.B\end{array} &
\end{tikzcd}
$$

Hoja de ruta

$$
\begin{tikzcd}
& \text{System } F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}\textbf{Scalar}\\ \alpha.A\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\textbf{Additive}\\ A+B\end{array} \arrow[dl] \\
& \begin{array}{c}\textbf{Vectorial}\\ \alpha.A+\beta.B\end{array} &
\end{tikzcd}
$$

El sistema de tipos escalar

Un sistema de tipos que tiene en cuenta los escalares

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A}{\Gamma \vdash \alpha.\mathbf{t} : \alpha.A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \alpha.A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \beta.A}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : (\alpha + \beta).A}$$

El sistema de tipos escalar

Un sistema de tipos que tiene en cuenta los escalares

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A}{\Gamma \vdash \alpha.\mathbf{t} : \alpha.A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \alpha.A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \beta.A}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : (\alpha + \beta).A}$$

Cuenta la "cantidad" de términos $\rightarrow$ restricciones baricéntricas $(\sum \alpha_i = 1)$

El sistema de tipos escalar

Un sistema de tipos que tiene en cuenta los escalares

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A}{\Gamma \vdash \alpha.\mathbf{t} : \alpha.A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \alpha.A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \beta.A}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : (\alpha + \beta).A}$$

Cuenta la "cantidad" de términos $\rightarrow$ restricciones baricéntricas ($\sum \alpha_i = 1$)

$$f = \lambda x.(x\ [\frac{1}{2}.(\mathtt{true} + \mathtt{false})]\ [\frac{1}{4}.\mathtt{true} + \frac{3}{4}.\mathtt{false}]) : \mathtt{Bool} \Rightarrow \mathtt{Bool}$$

El sistema de tipos escalar

Un sistema de tipos que tiene en cuenta los escalares

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A}{\Gamma \vdash \alpha.\mathbf{t} : \alpha.A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \alpha.A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \beta.A}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : (\alpha + \beta).A}$$

Cuenta la “cantidad” de términos $\rightarrow$ restricciones baricéntricas ($\sum \alpha_i = 1$)

$$f = \lambda x.(x\ [\frac{1}{2}.(\mathtt{true} + \mathtt{false})]\ [\frac{1}{4}.\mathtt{true} + \frac{3}{4}.\mathtt{false}]) : \mathtt{Bool} \Rightarrow \mathtt{Bool}$$

$$f\ (\frac{1}{2}.(\mathtt{true} + \mathtt{false})) \rightarrow^* \frac{3}{8}.\mathtt{true} + \frac{5}{8}.\mathtt{false}$$

El sistema de tipos escalar

Un sistema de tipos que tiene en cuenta los escalares

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A}{\Gamma \vdash \alpha.\mathbf{t} : \alpha.A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \alpha.A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \beta.A}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : (\alpha + \beta).A}$$

Cuenta la "cantidad" de términos $\rightarrow$ restricciones baricéntricas ($\sum \alpha_i = 1$)

$$f = \lambda x.(x\ [\frac{1}{2}.(\texttt{true} + \texttt{false})]\ [\frac{1}{4}.\texttt{true} + \frac{3}{4}.\texttt{false}]) : \texttt{Bool} \Rightarrow \texttt{Bool}$$

$$f\ (\frac{1}{2}.(\texttt{true} + \texttt{false})) \rightarrow^* \frac{3}{8}.\texttt{true} + \frac{5}{8}.\texttt{false}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \alpha.(A \Rightarrow B) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \beta.A}{\Gamma \vdash \mathbf{t}\ \mathbf{r} : (\alpha \times \beta).B}$$

Hoja de ruta

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{System } F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\textbf{Scalar} \arrow[dr] & & \textcolor{red}{\textbf{Additive}} \arrow[dl] \\
 & \textbf{Vectorial} &
\end{tikzcd}
$$

El sistema de tipos aditivo

Un sistema de tipos que tiene en cuenta las superposiciones (sin escalares)

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : B}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : A + B}$$

- Sumas $\sim$ Pares asociativos y conmutativos
- Aplicación distributiva con respecto a la suma

El sistema de tipos aditivo

Un sistema de tipos que tiene en cuenta las superposiciones (sin escalares)

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : B}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : A + B}$$

- Sumas $\sim$ Pares asociativos y conmutativos
- Aplicación distributiva con respecto a la suma

Buscando una regla de tipado para $\Rightarrow_E$

El sistema de tipos aditivo

Un sistema de tipos que tiene en cuenta las superposiciones (sin escalares)

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : B}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : A + B}$$

- Sumas $\sim$ Pares asociativos y conmutativos
- Aplicación distributiva con respecto a la suma

Buscando una regla de tipado para $\Rightarrow_E$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \forall X.(A \Rightarrow B) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 : A[C_1/X] + A[C_2/X]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) : B[C_1/X] + B[C_2/X]}$$

El sistema de tipos aditivo

Un sistema de tipos que tiene en cuenta las superposiciones (sin escalares)

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : B}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : A + B}$$

- Sumas $\sim$ Pares asociativos y conmutativos
- Aplicación distributiva con respecto a la suma

Buscando una regla de tipado para $\Rightarrow_E$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \forall X.(A \Rightarrow B) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 : A[C_1/X] + A[C_2/X]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) : B[C_1/X] + B[C_2/X]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : \forall X.(A \Rightarrow B) + \forall Y.(C \Rightarrow D) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{s} : A[E/X] = C[F/Y]}{\Gamma \vdash (\mathbf{t} + \mathbf{r})\mathbf{s} : B[E/X] + D[F/Y]}$$

El sistema de tipos aditivo

Un sistema de tipos que tiene en cuenta las superposiciones (sin escalares)

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : A \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : B}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : A + B}$$

- Sumas $\sim$ Pares asociativos y conmutativos
- Aplicación distributiva con respecto a la suma

Buscando una regla de tipado para $\Rightarrow_E$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \forall X.(A \Rightarrow B) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 : A[C_1/X] + A[C_2/X]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) : B[C_1/X] + B[C_2/X]}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : \forall X.(A \Rightarrow B) + \forall Y.(C \Rightarrow D) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{s} : A[E/X] = C[F/Y]}{\Gamma \vdash (\mathbf{t} + \mathbf{r})\mathbf{s} : B[E/X] + D[F/Y]}$$

Juntando todo

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : \forall X.(A \Rightarrow B) + \forall X.(A \Rightarrow C) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 : A[D/X] + A[E/X]}{\Gamma \vdash (\mathbf{t} + \mathbf{r})(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) : B[D/X] + C[E/X]}$$

El sistema de tipos aditivo

La regla $\Rightarrow_E$

Generalizando...

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \forall \vec{X}.(A \Rightarrow B_i) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \sum_{j=1}^{m} A[\vec{C}_j/\vec{X}]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}\ \mathbf{r} : \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_i[\vec{C}_j/\vec{X}]}$$

El sistema de tipos aditivo

La regla $\Rightarrow_E$

Generalizando...

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \forall \vec{X}.(A \Rightarrow B_i) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \sum_{j=1}^{m} A[\vec{C}_j/\vec{X}]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}\ \mathbf{r} : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} B_i[\vec{C}_j/\vec{X}]}$$

Ejemplo

$$\mathtt{T} = \lambda x.\lambda y.x \qquad \mathtt{F} = \lambda x.\lambda y.y$$

$$\mathbb{T} = \forall X.\forall Y.X \Rightarrow Y \Rightarrow X \qquad \mathbb{F} = \forall X.\forall Y.X \Rightarrow Y \Rightarrow Y$$

El sistema de tipos aditivo

La regla $\Rightarrow_E$

Generalizando...

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \forall \vec{X}.(A \Rightarrow B_i) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \sum_{j=1}^{m} A[\vec{C}_j/\vec{X}]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}\ \mathbf{r} : \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} B_i[\vec{C}_j/\vec{X}]}$$

Ejemplo

$$\mathtt{T} = \lambda x.\lambda y.x \qquad \mathtt{F} = \lambda x.\lambda y.y$$

$$\mathbb{T} = \forall X.\forall Y.X \Rightarrow Y \Rightarrow X \qquad \mathbb{F} = \forall X.\forall Y.X \Rightarrow Y \Rightarrow Y$$

$$\frac{\vdash \lambda x.x + \lambda y.\mathtt{T} : \forall X.(X \Rightarrow X) + \forall Y.(Y \Rightarrow \mathbb{T}) \qquad \vdash \mathtt{T} + \mathtt{F} : \mathbb{T} + \mathbb{F}}{\vdash (\lambda x.x + \lambda y.\mathtt{T})(\mathtt{T} + \mathtt{F}) : \mathbb{T} + \mathbb{F} + \mathbb{T} + \mathbb{T}}$$

El sistema de tipos aditivo

La regla $\Rightarrow_E$

Generalizando...

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \forall \vec{X}.(A \Rightarrow B_i) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \sum_{j=1}^{m} A[\vec{C}_j/\vec{X}]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}\ \mathbf{r} : \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} B_i[\vec{C}_j/\vec{X}]}$$

Ejemplo

$$\mathtt{T} = \lambda x.\lambda y.x \qquad \mathtt{F} = \lambda x.\lambda y.y$$

$$\mathbb{T} = \forall X.\forall Y.X \Rightarrow Y \Rightarrow X \qquad \mathbb{F} = \forall X.\forall Y.X \Rightarrow Y \Rightarrow Y$$

$$\frac{\vdash \lambda x.x + \lambda y.\mathtt{T} : \forall X.(X \Rightarrow X) + \forall Y.(Y \Rightarrow \mathbb{T}) \qquad \vdash \mathtt{T} + \mathtt{F} : \mathbb{T} + \mathbb{F}}{\vdash (\lambda x.x + \lambda y.\mathtt{T})(\mathtt{T} + \mathtt{F}) : \mathbb{T} + \mathbb{F} + \mathbb{T} + \mathbb{T}}$$

$$(\lambda x.x + \lambda y.\mathtt{T})(\mathtt{T} + \mathtt{F}) \to^* \underbrace{(\lambda x.x)\mathtt{T}}_{X[\mathbb{T}/X]} + \underbrace{(\lambda x.x)\mathtt{F}}_{X[\mathbb{F}/X]} + \underbrace{(\lambda y.\mathtt{T})\mathtt{T}}_{\mathbb{T}[\mathbb{T}/Y]} + \underbrace{(\lambda y.\mathtt{T})\mathtt{F}}_{\mathbb{T}[\mathbb{F}/Y]}$$

Hoja de ruta

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{System } F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\begin{array}{c}\textbf{Scalar}\\ \alpha.A\end{array} \arrow[dr] & & \begin{array}{c}\textbf{Additive}\\ A+B\end{array} \arrow[dl] \\
 & \begin{array}{c}\color{red}{\textbf{Vectorial}}\\ \alpha.A+\beta.B\end{array} &
\end{tikzcd}
$$

El cálculo vectorial

Tipos:

$$\begin{array}{c} T, R, S := U \mid T + R \mid \alpha.T \\ A, B, C := X \mid A \Rightarrow T \mid \forall X.A \end{array}$$

(A, B, C son los tipos de base)

Equivalencias entre tipos:

$$\begin{array}{rcl} 1.T & \equiv & T \\ \alpha.(\beta.T) & \equiv & (\alpha \times \beta).T \\ \alpha.T + \alpha.R & \equiv & \alpha.(T + R) \\ \alpha.T + \beta.T & \equiv & (\alpha + \beta).T \\ T + R & \equiv & R + T \\ T + (R + S) & \equiv & (T + R) + S \end{array}$$

(axiomas de los espacios vectoriales)

Reglas de tipado

$$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}\ ax \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : T}{\Gamma \vdash 0 : 0.T}\ 0_I \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : T}{\Gamma \vdash \alpha.\mathbf{t} : \alpha.T}\ s_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\forall \vec{X}.(A \Rightarrow T_i) \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : \sum_{j=1}^{m} \beta_j.A[\vec{B}_j/\vec{X}]}{\Gamma \vdash \mathbf{t}\ \mathbf{r} : \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \times \beta_j.T_i[\vec{B}_j/\vec{X}]}\ \Rightarrow_E$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash \mathbf{t} : T}{\Gamma \vdash \lambda x.\mathbf{t} : A \Rightarrow T}\ \Rightarrow_I \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : T \qquad \Gamma \vdash \mathbf{r} : R}{\Gamma \vdash \mathbf{t} + \mathbf{r} : T + R}\ +_I$$

$$\frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.A_i \qquad X \notin FV(\Gamma)}{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\forall X.A_i}\ \forall_I \qquad \frac{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\forall X.A_i}{\Gamma \vdash \mathbf{t} : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.A_i[B/X]}\ \forall_E$$

Expresando matrices y vectores

En dos dimensiones

$$U = \lambda x.\{x\ [a.\mathtt{T} + b.\mathtt{F}]\ [c.\mathtt{T} + d.\mathtt{F}]\}$$

$$H = U \text{ con } a = b = c = {}^{1}\!/\!\sqrt{2} \text{ y } d = -{}^{1}\!/\!\sqrt{2}$$

Expresando matrices y vectores

En dos dimensiones

$$U = \lambda x.\{x\ [a.\mathtt{T} + b.\mathtt{F}]\ [c.\mathtt{T} + d.\mathtt{F}]\}$$

$$H = U \text{ con } a = b = c = {}^1\!/\!\sqrt{2} \text{ y } d = -{}^1\!/\!\sqrt{2}$$

$$\vdash U : \forall X.((I \Rightarrow (a.\mathbb{T} + b.\mathbb{F})) \Rightarrow (I \Rightarrow (c.\mathbb{T} + d.\mathbb{F})) \Rightarrow I \Rightarrow X) \Rightarrow X$$

Expresando matrices y vectores

Con n dimensiones

$$\boxed{\text{2 dimensiones}}$$

$$Gen\{\underbrace{\lambda x.\lambda y.x}_{\mathtt{T}}, \underbrace{\lambda x.\lambda y.y}_{\mathtt{F}}\}$$

Expresando matrices y vectores

Con n dimensiones

$\boxed{\text{2 dimensiones}}$

$$Gen\{\underbrace{\lambda x.\lambda y.x}_{\texttt{T}},\underbrace{\lambda x.\lambda y.y}_{\texttt{F}}\}$$

$\boxed{n \text{ dimensiones}}$

$$Gen\{\lambda x_1\cdots\lambda x_n.x_i, i=1,\cdots,n\}$$

Expresando matrices y vectores

Con n dimensiones

2 dimensiones

$$Gen\{\underbrace{\lambda x.\lambda y.x}_{\mathtt{T}}, \underbrace{\lambda x.\lambda y.y}_{\mathtt{F}}\}$$

n dimensiones

$$Gen\{\lambda x_1 \cdots \lambda x_n.x_i, i = 1, \cdots, n\}$$

2 dimensiones

$$\vdash \alpha.\underbrace{\lambda x.\lambda y.x}_{\mathtt{T}} + \beta.\underbrace{\lambda x.\lambda y.y}_{\mathtt{F}} : \alpha.\underbrace{\forall XY.X \Rightarrow Y \Rightarrow X}_{\mathbb{T}} + \beta.\underbrace{\forall XY.X \Rightarrow Y \Rightarrow Y}_{\mathbb{F}}$$

Expresando matrices y vectores

Con n dimensiones

$\boxed{\text{2 dimensiones}}$

$$Gen\{\underbrace{\lambda x.\lambda y.x}_{\mathtt{T}},\underbrace{\lambda x.\lambda y.y}_{\mathtt{F}}\}$$

$\boxed{n\text{ dimensiones}}$

$$Gen\{\lambda x_1\cdots\lambda x_n.x_i, i=1,\cdots,n\}$$

$\boxed{\text{2 dimensiones}}$

$$\vdash \alpha.\underbrace{\lambda x.\lambda y.x}_{\mathtt{T}}+\beta.\underbrace{\lambda x.\lambda y.y}_{\mathtt{F}} : \alpha.\underbrace{\forall XY.X\Rightarrow Y\Rightarrow X}_{\mathbb{T}}+\beta.\underbrace{\forall XY.X\Rightarrow Y\Rightarrow Y}_{\mathbb{F}}$$

$\boxed{n\text{ dimensiones}}$

$$\vdash \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\lambda x_1\cdots\lambda x_n.x_i : \sum_{i=1}^{n}.\alpha_i.\forall X_1\cdots\forall X_n.(X_1\Rightarrow\cdots\Rightarrow X_n\Rightarrow X_i)$$

Expresando vectores y matrices

Haciendo que se parezcan más a vectores y matrices

$$\mathbf{e}_i^n = \lambda x_1 \cdots \lambda x_n.x_i \qquad \mathbf{E}_i^n = \forall X_1 \cdots \forall X_n.(X_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n \Rightarrow X_i)$$

Expresando vectores y matrices

Haciendo que se parezcan más a vectores y matrices

$$\mathbf{e}_i^n = \lambda x_1 \cdots \lambda x_n . x_i \qquad \mathbf{E}_i^n = \forall X_1 \cdots \forall X_n . (X_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow X_n \Rightarrow X_i)$$

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right]\!\!\right]_n^{\mathrm{term}} = \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1^n \\ + \\ \cdots \\ + \\ \alpha_n \cdot \mathbf{e}_n^n \end{array} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{e}_i^n,$$

$$\left[\!\!\left[\begin{array}{c} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{array} \right]\!\!\right]_n^{\mathrm{type}} = \left(\begin{array}{c} \alpha_1 \cdot \mathbf{E}_1^n \\ + \\ \cdots \\ + \\ \alpha_n \cdot \mathbf{E}_n^n \end{array} \right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mathbf{E}_i^n.$$

Expresando vectores y matrices

Haciendo que se parezcan más a vectores y matrices

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix},$$

Expresando vectores y matrices

Haciendo que se parezcan más a vectores y matrices

$$U = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nm} \end{pmatrix},$$

$$[\![U]\!]^{\text{term}}_{n\times m} = \quad \lambda x.\left\{\left(\cdots\left((x)\begin{bmatrix} \alpha_{11}\cdot \mathbf{e}^n_1 \\ + \\ \cdots \\ + \\ \alpha_{n1}\cdot \mathbf{e}^n_n \end{bmatrix}\right)\cdots\begin{bmatrix} \alpha_{1m}\cdot \mathbf{e}^n_1 \\ + \\ \cdots \\ + \\ \alpha_{nm}\cdot \mathbf{e}^n_n \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$[\![U]\!]^{\text{type}}_{n\times m} = \quad \forall X.\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11}\cdot \mathbf{E}^n_1 \\ + \\ \cdots \\ + \\ \alpha_{n1}\cdot \mathbf{E}^n_n \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{1m}\cdot \mathbf{E}^n_1 \\ + \\ \cdots \\ + \\ \alpha_{nm}\cdot \mathbf{E}^n_n \end{bmatrix} \Rightarrow [\ X\ ]\right) \Rightarrow X,$$

Expresando vectores y matrices

El producto tensorial $\longrightarrow$ ¡una expresión lambda!

En el pizarrón